DM n°2 : Sommes et produits

Exercice 1 : une preuve de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ sans connaitre la formule à l'avance

En calculant $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$ de deux façons, retrouver la formule de $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 2 : calcul de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \qquad\qquad T = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!(n-k)!}$$

Exercice 3 : un calcul avec une crosse de hockey

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'expression suivante :

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{p} (i+j)$$

INDICATION – *On admettra la formule suivante* :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i+p}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}$$

Cette formule (hors programme) est appelée “crosse de hockey de Pascal” : par exemple avec $p = 2$ et $n = 3$, elle implique que :

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}$$

on vérifie sur le triangle qu'on a bien : $1+3+6+10=20$

$\binom{n}{p}$		p = 0	1	2	3	4	5	
	0	1						
	1	1	1					
	2	1		**1**				
n	3	1		**3**	1			
	4	1		**6**		1		
	5	1		**10**			1	
	6	1			**20**			1

Si on se fixe une colonne et qu'on fait la somme des termes de cette colonne jusqu'à une ligne donnée (ci-dessus 5), on obtient le terme situé immédiatement en bas à gauche du dernier terme qu'on somme. Cela forme grosso modo une cross de hockey...